UN ZOOM DE DEUXIÈME GÉNÉRATION POUR LMD-Z

Robert Sadourny et Le Van Phu

Laboratoire de Météorologie Dynamique

École Normale Supérieure

Mars 2001

1. **Introduction**

Le zoom (ou étirement de coordonnée) du modèle LMD-Z est défini séparément dans chacune des deux directions, la longitude x et l**a latitude** y, par **quatre** paramètres :

i. L'*abscisse du centre du zoom* : x_0 ou y_0 (en radians) ;
ii. Le *grossissement au centre du zoom*: γ (par rapport à une grille régulière de même nombre de points) ;
iii. La *largeur de la fenêtre du zoom*: δ (en radians) ;
iv. La *raideur de la transition de l'intérieur à l'extérieur du zoom* : τ

.

La fonction d'étirement est basée sur des raccordements de tangentes hyperboliques, ce qui permet d'obtenir des résolutions relativement uniformes dans le zoom et à l'extérieur.

On notera que γ et δ ne sont pas indépendants, car il ne faut pas dégrader exagérément la grille à l'extérieur du zoom : cette dégradation (ou rapport de la maille avec zoom à la maille sans zoom) est de l'ordre de $(2\pi - \gamma\,\delta)/(2\pi - \delta)$en longitude, ou $(\pi - \gamma\delta)/(\pi - \delta)$ en latitude. Une limite raisonnable consiste à ne pas accepter plus de la moitié des points à l'intérieur du zoom :

$$\left.\begin{array}{ll} \gamma\,\delta < \pi & \text{en longitude} \\ \gamma\,\delta < \pi/2 & \text{en latitude} \end{array}\right\}, \quad \mathbf{(1)}$$

soit une dégradation maximale de l'ordre de $\pi/(2\pi - \delta)$ à l'extérieur. La condition (**1**) n'est suffisante que pour une raideur infinie. On verra sur des exemples qu'il faut être plus contraignant si l'on use de grossissements forts et de raideurs faibles.

On notera aussi que la transition entre le zoom et l'extérieur est d'autant plus rapide que τ est grand. Une raideur moyenne est de l'ordre de **1**. Les effets de distorsion dus aux variations de la résolution à travers les bords de la fenêtre zoomée seront d'autant plus marqués que la raideur choisie sera grande.

Pour ne pas dégrader l'ordre des approximations, la structure du zoom sera définie par des applications analytiques. Pour obtenir des résolutions quasi-uniformes à l'intérieur et à l'extérieur de la fenêtre du zoom (en dehors des zones de transition), le grossissement sera construit par des recollements de fonctions tangente hyperbolique, l'intérieur et l'extérieur du zoom correspondant aux asymptotes où cette fonction varie peu. Nous définirons

$$\mathbf{T}(x) = tanh x \;(-\infty < x < +\infty),\; \mathbf{T}(-\infty) = -1,\; \mathbf{T}(+\infty) = +1 . \quad \mathbf{(2)}$$

Pour faciliter l'écriture, nous userons aussi de la fonction de Heavyside $\mathbf{H}$ (définie par $\mathbf{H}(x) = 0$

pour $x \leq 0$, et par $\mathbf{H}(x) = 1$ pour $x > 0$) pour formaliser la façon dont on recadre des intervalles ou dont on réordonne des indices.

1. **Le zoom en longitude**

Nous choisissons pour valuation de la longitude de référence le domaine $(-\pi, +\pi)$: l'origine des longitudes est ainsi située au centre de la grille. Commençons par définir une longitude $\tilde{x}$ recentrée au centre du zoom : $\tilde{x}_0 = 0$, $-\pi \leq \tilde{x} \leq \pi$. Elle sera liée à la longitude initiale par

$$x^* = x_0 + \tilde{x}\ , \quad \mathbf{(3)}$$

$$x = x^* - 2\pi\,\mathbf{H}\left(x^* - \pi\right) + 2\pi\,\mathbf{H}\left(-x^* - \pi\right)\ . \quad \mathbf{(4)}$$

On se donne alors la dérivée (ou grossissement local) de la coordonnée de travail $\tilde{X}$, variant elle aussi sur ($-\pi, +\pi$) et centrée au centre du zoom :

$$\tilde{X}'(\tilde{x}) = \frac{d\tilde{X}}{d\tilde{x}} = g(\tilde{x}) = \beta + (\gamma - \beta)F(\tilde{x};\delta,\tau)\ , \quad \mathbf{(5)}$$

avec

$$F(\tilde{x};\delta,\tau) = \mathrm{T}\left(\frac{\tau\left(\frac{1}{2}\delta - \tilde{x}\right)}{\tilde{x}\left(\pi - \tilde{x}\right)}\right)\ , \quad \mathbf{(6)}$$

pour $0 \leq \tilde{x} \leq \pi$.

La condition que, sur cet intervalle, $\tilde{X}$ lui-même doit varier de 0 à π entraîne

$$\int_0^\pi g(\tilde{x})d\tilde{x} = \pi\ , \quad \mathbf{(7)}$$

d'où l'expression de β:

$$\beta = \frac{\gamma\int_0^\pi F(\tilde{x};\delta,\tau)d\tilde{x} - \pi}{\int_0^\pi F(\tilde{x};\delta,\tau)d\tilde{x} - \pi}\ . \quad \mathbf{(8)}$$

De $\tilde{X}'(\tilde{x})$ on déduit $\tilde{X}(\tilde{x})$ de 0 à π sur une grille de travail régulière $\tilde{x}_k$ suffisamment fine (de l'ordre de 30 000 points) pour minimiser l'erreur dans les calculs suivants. On antisymétrise ensuite la fonction $\tilde{X}(\tilde{x})$ pour traiter l'intervalle $-\pi < \tilde{x} < 0$:

$$\tilde{X}'(-\tilde{x}) = \tilde{X}'(\tilde{x}) \quad \text{ou} \quad \tilde{X}(-\tilde{x}) = -\tilde{X}(\tilde{x})\ . \quad \mathbf{(9)}$$

La coordonnée de travail $\tilde{X}$ varie ainsi de $-\pi$ à $+\pi$ comme $\tilde{x}$.

Enfin, on se donne la grille régulière du modèle dans l'espace de travail centré sur le zoom :

$$\tilde{X}_{\tilde{m}} = -\pi + 2\pi\left(\tilde{m} - \tfrac{1}{2}\right)/M \,, \left(\tilde{m} = 1, M\right), \quad \mathbf{(10)}$$

et l'on résout

$$\tilde{X}\left(\tilde{x}_{\tilde{m}}\right) = \tilde{X}_{\tilde{m}} \quad \mathbf{(11)}$$

pour obtenir les longitudes des points de la grille zoomée :

$$x_{\tilde{m}}^{**} = x_0 + \tilde{x}_{\tilde{m}} \,, \quad \mathbf{(12)}$$

$$x_{\tilde{m}}^{*} = x_{\tilde{m}}^{**} - 2\pi\, \mathsf{H}\left(x_{\tilde{m}}^{**} - \pi\right) + 2\pi\, \mathsf{H}\left(-x_{\tilde{m}}^{**} - \pi\right) \quad \mathbf{(13)}$$

Il reste à réordonner ces points dans l'intervalle $\left(-\pi, +\pi\right)$: on définira donc m_0 tel que

$$x_{m_0}^{*} = Min\left(x_{\tilde{m}}^{*}\right), \quad \mathbf{(14)}$$

qui nous amène au champ réordonné

$$m = \left(-1 + M\, \mathsf{H}\right)\left(m_0 - \tilde{m}\right) + 1 \,, \quad \mathbf{(15)}$$

$$x_m = x_{\tilde{m}}^{*} \,. \quad \mathbf{(16)}$$

Le facteur d'échelle associé à la grille sera alors

$$x_m' = x'\left(X_m\right) = \frac{1}{X'\left(x_m\right)} \,. \quad \mathbf{(17)}$$

2. **Le zoom en latitude**

Le problème est ici légèrement différent à cause de l'asymétrie qui résulte d'un zoom non centré sur l'équateur, et aussi de l'absence de valuation multiple pour la latitude. Désignons par y_0 la latitude du centre du zoom. La formulation du zoom latitudinal va dépendre de la position du centre par rapport à l'équateur. Nous le définirons comme précédemment, mais sur un domaine $\left[2y_0\, \mathsf{H}\left(-y_0\right) - \frac{\pi}{2},\ 2y_0\, \mathsf{H}\left(y_0\right) + \frac{\pi}{2}\right]$, symétrique par rapport au centre du zoom, s'étendant donc au delà du pôle de l'hémisphère où est centré le zoom.

On définira alors le grossissement local par l'analogue de (**5**)

$$Y'(y) = \frac{dY}{dy} = g(y) = \beta + (\gamma - \beta)F(y; \delta, \tau) \,, \quad \mathbf{(18)}$$

avec

$$F(y;\delta,\tau) = \mathsf{T}\left(\frac{\tau\left(y-y_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\left[y-2y_0\,\mathsf{H}(-y_0)+\frac{\pi}{2}\right](y_0-y)}\right),\ \left(-\tfrac{\pi}{2}\le y\le y_0\right),\quad \mathbf{(19)}$$

$$F(y;\delta,\tau) = \mathsf{T}\left(\frac{\tau\left(y_0+\frac{\varepsilon}{2}-y\right)}{(y-y_0)\left[2y_0\,\mathsf{H}(y_0)+\frac{\pi}{2}-y\right]}\right),\ \left(y_0\le y\le+\tfrac{\pi}{2}\right).\quad \mathbf{(20)}$$

La condition à imposer est que Y varie de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$ quand y varie de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} g(y)\,dy = \pi,\quad \mathbf{(21)}$$

d'où l'expression de β :

$$\beta = \frac{\gamma\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} F(y,\delta,\tau)\,dy-\pi}{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} F(y,\delta,\tau)\,dy-\pi}.\quad \mathbf{(22)}$$

De $Y'(y)$ on déduit $Y(y)$ sur une grille de travail régulière y_n suffisamment fine (de l'ordre de 30 000 points) pour apporter le moins d'erreur possible dans les calculs qui suivent.

On se donne alors la grille régulière du modèle dans l'espace de travail, allant du pôle sud au pôle nord inclus :

$$Y_m = -\frac{\pi}{2}+\pi\frac{m-1}{M},\ (m=1,\ M+1),\quad \mathbf{(23)}$$

où M correspond à la résolution méridienne du modèle en nombre d'intervalles, et l'on résout

$$Y(y_m) = Y_m\quad \mathbf{(24)}$$

pour obtenir les latitudes y_m des points de la grille zoomée.

Le facteur d'échelle associé sera alors

$$y'_m = y'(Y_m) = \frac{1}{Y'(y_m)}.\quad \mathbf{(25)}$$

3. **Contrôle des paramètres**

Dans la pratique, on se fixe une limite considérée a priori comme acceptable pour la dégradation de la grille hors de la fenêtre : ε ("grossissement" compris entre 0 et 1, typiquement de l'ordre de 0,2 ou 0,1). C'est un cinquième paramètre du programme. Le logiciel de construction du zoom teste la condition

$$2\beta-\gamma > \varepsilon.\quad \mathbf{(26)}$$

Si cette condition n'est pas satisfaite, un message d'erreur apparaît :

Votre choix de paramètres n'est pas acceptable. Vous devez

Ou modérer le grossissement (diminuer γ),

Ou restreindre la fenêtre du zoom (diminuer δ),

Ou accentuer la raideur (augmenter τ)

Ou tolérer plus de dégradation hors du zoom (diminuer ε)